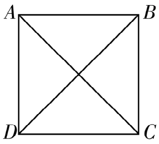
第1章　平面向量及其应用

1.1　向量

1. C　【解析】因为速度、力和加速度既有大小，又有方向，所以它们是向量，而质量、路程和功只有大小，没有方向，所以它们不是向量，故不是向量的个数是 3.

2. D　【解析】如图，以正方形 $ABCD$ 的四个顶点为起点与终点的所有有向线段能表示的向量为 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CD}$，共 12 个. 故选 D.



3. B　【解析】由六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，所以 $ED=AB$，与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的只有 $\overrightarrow{ED}$；而 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 长度相等，方向不同，所以选项 A，C，D 均错误. 故选 B.

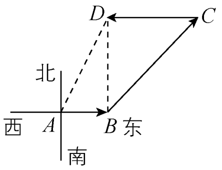
4. ②③　【解析】对于①，A，B，C，D 四点可能在同一条直线上，故①不正确；对于②，在▱$ABCD$ 中，$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$，$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 方向相同，所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，故②正确；对于③，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则 $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$，且 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 方向相同，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 方向相同且模相等，故 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$，故③正确.

5. D　【解析】向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 不是相等向量，它们有可能是相反向量，有可能长度相等，有可能模相等但方向不相同，但不能都是零向量，故选项 A，B，C 错误，D 正确. 故选 D.

6. 12　【解析】以矩形 $ABCD$ 的四个顶点及它的对角线交点 O 五点中的任一点为起点，其余四点中的一个点为终点的向量共有 20 个. 但这 20 个向量中有 8 对向量是相等的，其余 4 个向量互不相等，即为 $\overrightarrow{AO}$（$\overrightarrow{OC}$），$\overrightarrow{OA}$（$\overrightarrow{CO}$），$\overrightarrow{DO}$（$\overrightarrow{OB}$），$\overrightarrow{OD}$（$\overrightarrow{BO}$），$\overrightarrow{AD}$（$\overrightarrow{BC}$），$\overrightarrow{DA}$（$\overrightarrow{CB}$），$\overrightarrow{AB}$（$\overrightarrow{DC}$），$\overrightarrow{BA}$（$\overrightarrow{CD}$），$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{DB}$. 由集合中元素的互异性知，T

中有 12 个元素.

7.【解】(1) 作出向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$，如图所示.



(2) 连接 AD, BD. 由题意得，$\triangle BCD$ 是直角三角形，其中 $\angle BDC = 90^\circ$，$BC = 10\sqrt{2}$ 米，$CD = 10$ 米，

所以 $BD = 10$ 米.

易得 $\triangle ABD$ 是直角三角形，

其中 $\angle ABD = 90^\circ$，$AB = 5$ 米，

所以 $AD = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$ (米).

所以 $|\overrightarrow{AD}| = 5\sqrt{5}$ 米.

8. ABC 【解析】两向量相等要求长度(模)相等，方向相同. 设菱形 $ABCD$ 的边长为 a，因为 $\angle DAB = 120^\circ$，所以由菱形的性质可得 $DB = \sqrt{3}a$，$AC = a$. A 中，与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量只有 $\overrightarrow{DC}$；B 中，与 $\overrightarrow{AB}$ 的模相等的向量有 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}$，共 9 个；C 中，$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{3}a$，$|\overrightarrow{DA}| = a$，$\overrightarrow{BD}$ 的模恰为 $\overrightarrow{DA}$ 模的 $\sqrt{3}$ 倍；D 中，$\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}$ 的长度相等，方向相同，所以 $\overrightarrow{CB}$ 与 $\overrightarrow{DA}$ 是相等向量.

1.2 向量的加法

1. D 【解析】$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} - \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{QP}$，故选 D.

2. B 【解析】①$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ 的等价式为 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$，左边 $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$，右边 $= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$，不一定相等；

②$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ 的等价式为 $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$，左边 = 右边 $= \overrightarrow{DC}$，故②正确；

③$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}$ 的等价式为 $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$，左边 = 右边 $= \overrightarrow{BC}$，故③正确. 所以正确的有 2 个. 故选 B.

3. D 【解析】由 $ABCDEF$ 为正六边形，得 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB}$，所以 $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CF}$. 故选 D.

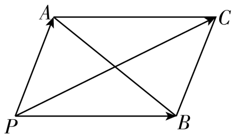
4. A 【解析】①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$，故错误；②相反向量是长度相等，方向相反的向量，故错误；③$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，故错误；④$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$与$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的大小不确定，故错误.

5. 0　2 【解析】若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为相反向量，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=0$.

又因为 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$，所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|=2$.

6. D 【解析】由于$|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{a}|=1$，$|\overrightarrow{BC}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，则$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$，即$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形. 故选 D.

7. D 【解析】$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}$，如图，根据平行四边形法则，可知点 P 在$\triangle ABC$ 的外部. 故选 D.

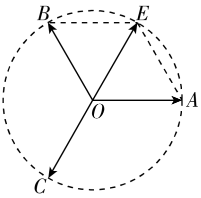


8. A 【解析】因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，

所以$|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\leqslant 3$，当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 方向都相同时，等号成立，

作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，

当$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\dfrac{2\pi}{3}$时，如图所示，



以 OA，OB 为邻边作平行四边形 $OAEB$，则四边形 $OAEB$ 为菱形，且$\angle AOE=\dfrac{\pi}{3}$，

所以$\triangle AOE$ 为等边三角形，且$|\overrightarrow{OE}|=1$，

又因为$\angle AOC=\dfrac{2\pi}{3}$，$|\overrightarrow{OC}|=1$，由图可知，$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\mathbf{0}$，

所以$|\boldsymbol{p}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=0$，

综上所述，$0\leqslant|\boldsymbol{p}|\leqslant 3$.

9. $\boldsymbol{b}_6$ 【解析】由题图可知，$\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_5+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_5+\boldsymbol{b}_7=\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_7}=(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2A_3})+(\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{A_5A_6})+\overrightarrow{OA_7}=\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_6}+\overrightarrow{OA_7}=\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_6}-\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OA_6}=\boldsymbol{b}_6$.

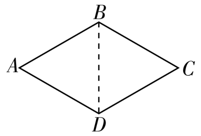
10. $(0,4]$ $(2,6]$ 【解析】因为$||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|=4$，又 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，所以$|\boldsymbol{a}|$的取值范围是$(0,4]$.

因为$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=2|\boldsymbol{b}|\geqslant||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||$，所以$-4\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant4$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant4$.

又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，

所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的取值范围是$(2,6]$.

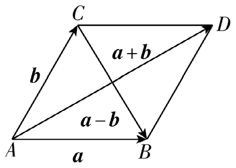
11. 1 【解析】连接 BD，因为四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=120°$，$|\overrightarrow{AB}|=1$，所以$\triangle ABD$ 为边长为 1 等边三角形，所以$|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{BD}|=1$.



12. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】如图，当$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$时，$\triangle ABC$ 为等边三角形，

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$为线段 AD 的长度，

所以$\dfrac{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\tan\ 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



13. AD 【解析】$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$，则 A 正确；

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}$，B 错误；

$(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{MB}$，C 错误；

$(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$，则 D 正确. 故选 AD.

1.3 向量的数乘

1. C 【解析】当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相同，$\boldsymbol{a}$ 与 $-\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相反，且$|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$. 因为 $\lambda^2>0$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda^2\boldsymbol{a}$ 的方向相同.

2. C 【解析】在矩形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，故 A 错误；$2\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$，故 B 错误；$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+$

$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$，故 D 错误；由矩形的对角线相等，得 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{DB}|$ 成立，即 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$ 成立，故选 C.

3. B 【解析】因为 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线，所以存在唯一实数 λ，使 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，

所以 $\begin{cases}k=\lambda,\\2\lambda=-1,\end{cases}$ 解得 $k=\lambda=-\dfrac{1}{2}$.

故选 B.

4. $-3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ 【解析】因为 $3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{a})-4(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathbf{0}$，

所以 $3\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，

所以 $\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，所以 $\boldsymbol{x}=-3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$.

5. A 【解析】$\because$ D 是 AB 的中点，

$\therefore \overrightarrow{DA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

$\because$ F 在 AC 上且 $\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$，

$\therefore \overrightarrow{AF}+2(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC})=\mathbf{0}$，

$\therefore \overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

$\therefore \overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{6}\boldsymbol{b}$. 故选 A.

6. 12 【解析】因为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB})$，即 $3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 平行且方向相同. 因为 $3|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BC}|$，$S_{\triangle PAB}=4$，设在 $\triangle ABC$ 中，边 BC 上的高为 h，所以 $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PAB}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AP}|\cdot h}=\dfrac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AP}|}=3$，即 $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle PAB}=3\times4=12$. 所以 $\triangle ABC$ 的面积为 12.

7. (1)【解】$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EC}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

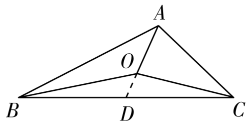
$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

(2)【证明】因为 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$. 又 $\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{AG}$ 有公共点 A，故 A，F，G 三点共线.

8. AD 【解析】如图①，取 BC 的中点 D，连接 OD，则 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$，

若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，则 $2\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$，所以 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 共线且有公共点 O，则 O，A，D 三点共线，且 $2|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OA}|$，

则 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，故 A 正确；

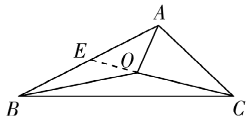


图①

若 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$，则 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，不一定是内心，故 B 错误；

若 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，AD 是 BC 边上的中线，则 $|\overrightarrow{AO}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{AD}|$，即 $3\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AD}$，故 C 错误；

如图②，取 AB 的中点 E，连接 OE，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OE}$，



图②

若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CO}$，则 $\overrightarrow{CO}=2\overrightarrow{OE}$，即 $\overrightarrow{CO}$ 与 $\overrightarrow{OE}$ 共线且公共点为 O，则 O，C，E 三点共线，且 $|\overrightarrow{OE}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{CE}|$，

则 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，故 D 正确. 故选 AD.

9. AC 【解析】由 $\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$ 可得 $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=t(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$，即 $\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BA}$，

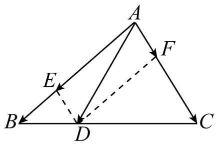
当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，即 C 为线段 AB 的中点，A 正确；当 C 为线段 AB 的三等分点时，C 可能是靠近点 B 的三等分点也可能是靠近点 A 的三等分点，故 $t=\frac{1}{3}$ 或 $t=\frac{2}{3}$，B 错误；当 $t\in(0,1)$ 时，$\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BA}$，由于 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BA}$ 同向，故点 C

在线段 AB 上，C 正确；当点 C 在线段 AB 的延长线上时，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BA}$ 反向，故 $t<0$，D 错误. 故选 AC.

1.4　向量的分解与坐标表示

1.4.1　向量分解及坐标表示

1. B　【解析】如图，过点 D 分别作 AC，AB 的平行线，交 AB，AC 于点 E，F. 易得四边形 $AEDF$ 为平行四边形，故 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$，$AE:BE=CF:AF$. 又 D 是 BC 边上靠近点 B 的一个三等分点，所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，故 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$. 故选 B.



2. D　【解析】由任一向量的坐标的定义可知，当点 A 是坐标原点时，点 B 的坐标是 $(-2,4)$.

3. D　【解析】由题意，在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\overrightarrow{AN}$，

所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3\lambda}{4}\overrightarrow{AN}$.

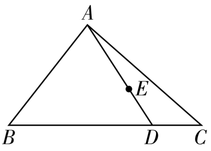
因为 B，P，N 三点共线，所以 $\frac{\lambda}{2}+\frac{3\lambda}{4}=1$，解得 $\lambda=\frac{4}{5}$，故选 D.

4. −2　【解析】因为 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{AB}+3(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AC})$，

所以 $\overrightarrow{AO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. 又因为 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以 $x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{3}{2}$，

故 $x-y=-2$.

5. B　【解析】由点 E 在射线 AD 上（不含点 A），设 $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AD}$，$k>0$，



因为 $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{AE}=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=k\left[\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\right]=\frac{k}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3k}{4}\overrightarrow{AC}$，

则 $\begin{cases}\lambda=\frac{k}{4},\\ \mu=\frac{3k}{4},\end{cases}$

因此 $(\mu+2)^2+\lambda^2=\left(\frac{3k}{4}+2\right)^2+\frac{1}{16}k^2=\frac{5}{8}k^2+3k+4>4$，

所以 $(\mu+2)^2+\lambda^2$ 的取值范围是 $(4,+\infty)$.

6. D 【解析】因为点 F 为线段 BC 上(不含端点)任意一点，

所以设 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BC}(0<\lambda<1)$，故 $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}-\lambda\overrightarrow{AB}$，

即 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AC}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}$，

又 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AC}(x>0,y>0)$，

所以 $x+2y=1-\lambda+\lambda=1$，

故 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)(x+2y)=1+4+\frac{2y}{x}+\frac{2x}{y}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{2x}{y}}=9$，

当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{2x}{y}$，即 $x=y=\frac{1}{3}$ 时，等号成立，故 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值为 9.

7.【解】(1) $\because AN=\frac{1}{4}AB$，$\therefore \overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$，$\therefore \overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

$\because BM=\frac{2}{3}BC$，

$\therefore \overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，

$\therefore \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

(2) $\because A,O,M$ 三点共线，

$\therefore$ 存在实数 λ，使 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AM}$，则 $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=\lambda\left(\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}\right)-\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\left(\frac{2}{3}\lambda-1\right)\boldsymbol{b}$. $\because D,O,N$ 三点共线，

$\therefore$ 存在实数 μ，使 $\overrightarrow{DO}=\mu\overrightarrow{DN}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}+\left(\frac{2}{3}\lambda-1\right)\boldsymbol{b}=\mu\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)$.

由于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，

则 $\begin{cases}\lambda=\frac{1}{4}\mu,\\ \frac{2}{3}\lambda-1=-\mu,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{3}{14},\\ \mu=\frac{6}{7}.\end{cases}$

$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{3}{14}\overrightarrow{AM},\overrightarrow{OM}=\frac{11}{14}\overrightarrow{AM}$,

$\therefore AO:OM=3:11$.

8. AC 【解析】$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，A 正确，B 错误；因为 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$，所以 $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2m}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}n\overrightarrow{AN}$.

又因为 M,O,N 三点共线，所以 $\frac{2}{3}m+\frac{1}{3}n=1$，故 $2m+n=3$，C 正确，D 错误. 故选 AC.

1.4.2　向量线性运算的坐标表示

1. $\left(\frac{7}{2},4\right)$　【解析】设 $P(x,y)$，因为 $\overrightarrow{P_1P}=-3\overrightarrow{PP_2}$，$P_1(-1,1)$，$P_2(2,3)$，所以 $(x+1,y-1)=-3(2-x,3-y)$，所以

$\begin{cases}x+1=-3(2-x),\\ y-1=-3(3-y),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{7}{2},\\ y=4,\end{cases}$ 所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{7}{2},4\right)$.

2. -3　【解析】由 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$ 可知，$(-1,1)=\lambda(2,-1)+\mu(1,2)=(2\lambda+\mu,-\lambda+2\mu)$，

$\therefore \begin{cases}2\lambda+\mu=-1,\\ -\lambda+2\mu=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=-\frac{3}{5},\\ \mu=\frac{1}{5},\end{cases}$

$\therefore \frac{\lambda}{\mu}=-3$.

3. $\left(\frac{8}{3},-7\right)$　【解析】$\because \overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

$\therefore \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$.

$\therefore \overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(3,-6)$.

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(3,-6)$.

又$\because |\overrightarrow{CE}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{ED}|$，且 E 在 DC 的延长线上，$\therefore \overrightarrow{CE}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{ED}$.

设 $E(x,y)$，则 $(x-3,y+6)=-\frac{1}{4}(4-x,-3-y)$.

$\therefore \begin{cases} x-3=-\frac{1}{4}(4-x), \\ y+6=-\frac{1}{4}(-3-y), \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=\frac{8}{3}, \\ y=-7. \end{cases}$

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $\left(\frac{8}{3},-7\right)$.

4.【解】(1) $\because$ $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，$\boldsymbol{c}=(-2,-2)$，$\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}$，

$\therefore (3,4)=m(1,2)+n(-2,-2)=(m-2n,2m-2n)$，

$\therefore \begin{cases} m-2n=3, \\ 2m-2n=4, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} m=1, \\ n=-1. \end{cases}$

(2) $-\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c}=(-1-2k,-2-2k)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,6)$，

$\because (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})//(-\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c})$，

$\therefore 6(-1-2k)=4(-2-2k)$，解得 $k=\frac{1}{2}$，故实数 k 的值为 $\frac{1}{2}$.

5. C　【解析】在平行四边形 $ABCD$ 中，因为 $\overrightarrow{AD}=(3,7)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,3)$，对角线 AC 与 BD 交于点 O，所以 $\overrightarrow{CO}=-\overrightarrow{AO}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})=\left(-\frac{1}{2},-5\right)$. 故选 C.

6. $[0,2]$　【解析】建立如图所示的平面直角坐标系，设 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，其中 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$，由题意可知，$D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$E(1,0)$，$A(0,0)$，$F\left(\frac{7}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$B(2,0)$，$C\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{AP}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\overrightarrow{ED}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{7}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{ED}+\mu\overrightarrow{AF}$，

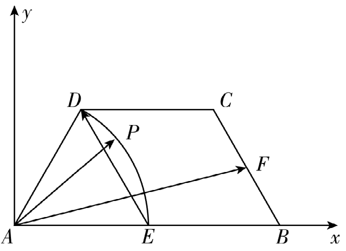
所以 $(\cos\theta,\sin\theta)=\lambda\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\mu\left(\frac{7}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，

则$\begin{cases}\cos\theta=-\dfrac{1}{2}\lambda+\dfrac{7}{4}\mu,\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mu,\end{cases}$

解得$\begin{cases}\lambda=\dfrac{7}{12}\sqrt{3}\sin\theta-\dfrac{1}{4}\cos\theta,\\ \mu=\dfrac{1}{6}\sqrt{3}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta,\end{cases}$

所以 $2\lambda+\mu=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\sin\theta$. 又 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3}$,

所以 $2\lambda+\mu=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\sin\theta\in[0,2]$.



7.【解】(1)由已知得,$\overrightarrow{AB}=(1,3)$,$\overrightarrow{AC}=(2,4)$,$\overrightarrow{AD}=(-3,5)$,$\overrightarrow{BD}=(-4,2)$,$\overrightarrow{CD}=(-5,1)$,

所以 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=(-3,5)+(-4,2)+(-5,1)=(-12,8)$.

由题设,存在实数 m,n 使得 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$,

则$(-12,8)=m(1,3)+n(2,4)$,

即$(-12,8)=(m+2n,3m+4n)$,

可得$\begin{cases}m+2n=-12,\\ 3m+4n=8,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}m=32,\\ n=-22.\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=32\overrightarrow{AB}-22\overrightarrow{AC}$.

(2)设 $P(x,y)$,则$\overrightarrow{AP}=(x-1,y+2)$,

又 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=(1,3)+\lambda(2,4)=(1+2\lambda,3+4\lambda)$,

则$\begin{cases}x-1=1+2\lambda,\\ y+2=3+4\lambda,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x=2+2\lambda,\\ y=1+4\lambda,\end{cases}$ 又点 P 在第四象限,所以$\begin{cases}2+2\lambda>0,\\ 1+4\lambda<0,\end{cases}$

解得$-1<\lambda<-\dfrac{1}{4}$,

故 λ 的取值范围是$\left(-1,-\dfrac{1}{4}\right)$.

8. BCD 【解析】设第四个顶点为 C. 对于 A 选项,当点 C 的坐标为$(-3,1)$时,$|OC|=\sqrt{10}$,$|AB|=\sqrt{5}$,$|AC|=4$,$|OB|=3$. 因为$|OC|\neq|AB|$,$|AC|\neq|OB|$,所以四边形 $ABOC$ 不是平行四

边形，A 不正确；对于 B 选项，当 C 点坐标为(4,1)时，因为 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}=(1,1)$，即 $OA//BC$ 且 $OA=BC$，故四边形 $OBCA$ 是平行四边形，B 正确；对于 C 选项，当 C 点坐标为(−2,1)时，因为 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}=(-2,1)$，即 $OC//BA$ 且 $OC=BA$，故 $OBAC$ 是平行四边形，C 正确；对于 D 选项，当 C 点坐标为(2,−1)时，因为 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=(2,-1)$，即 $OC//AB$ 且 $OC=AB$，故 $OCBA$ 是平行四边形，D 正确. 故选 BCD.

9. ACD 【解析】对于 A，若 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ 共线且 $\overrightarrow{AB}$ 的终点是 $\overrightarrow{BC}$ 的起点，所以 A,B,C 三点共线，故 A 正确；对于 B，因为 $\frac{2}{2}\neq\frac{-1}{4}$，所以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 不共线，故 B 错误；对于 C，若 $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$，则 $\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$，即 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$，且 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 有公共点 B，则 A,B,C 三点共线，故 C 正确；

对于 D，若 $\overrightarrow{AB}=(1,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,-4)$，则 $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 有公共点 A，则 A,B,C 三点共线，故 D 正确. 故选 ACD.

1.5 向量的数量积

1.5.1 数量积的定义及计算

1. C 【解析】由题意，非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$. 故选 C.

2. B 【解析】设 AC 边上的中线为 BD，因为 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $\overrightarrow{BO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$. 又因为 $AB=4$，$BC=6$，所以 $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{3}(|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{BA}|^2)=\frac{20}{3}$. 故选 B.

3. C 【解析】$\because (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°-6|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|-96=-72$,

$\therefore |\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|-24=0$, $\therefore |\boldsymbol{a}|=6$ 或 $|\boldsymbol{a}|=-4$(舍去).

4. D 【解析】由题可知,$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\cos 120°\times|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 2\boldsymbol{e}=-\boldsymbol{e}$,故选 D.

5. C 【解析】设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ $(\theta\in[0,\pi])$,因为$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,所以 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$,

所以$\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,得$|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=0$.

因为非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,所以 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$.

因为 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$,故选 C.

6. 3 【解析】由题意可得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos 120°=2\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$,

且 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=4+(-1)=3$.

7. 4 【解析】$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=1+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\times2^2=9$,$4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-8$,所以$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\times1^2+8+2^2=16$,所以$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=4$.

8. $[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$ 【解析】设向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 θ,由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}-1=0$,得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-1=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta$,

则$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-1|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||\cos\theta|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,

当且仅当 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线时取等号,

两边平方得$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1\leqslant\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+1\leqslant3^2+2^2$,

解得$-2\sqrt{3}\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant2\sqrt{3}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的取值范围是$[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$.

9. A 【解析】由题知$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$,所以$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0$,即 $\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$. 因为 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,所以$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$,即$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2$,所以

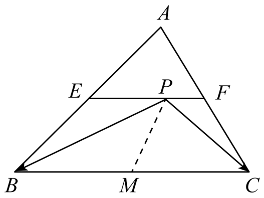
$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$. 又因为 $|\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|-|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-2\overrightarrow{PA}|=0$，所以 $|\overrightarrow{CB}|-|(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})|=0$，所以 $|\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$，即 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$，两边同时平方并展开化简可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，所以 $A=\frac{\pi}{2}$. 综上可知，$\triangle ABC$ 的形状是等腰直角三角形. 故选 A.

10. $\sqrt{3}$ 【解析】如图所示，取 BC 的中点 M，连接 PM，设 h 为点 A 到 BC 的距离，

由极化恒等式，得 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PM}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}^2$.

由题知，$S_{\triangle ABC}=\frac{h}{2}\times BC=1$，

则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{PM}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{PM}^2+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}^2\geqslant 2\sqrt{\frac{3}{4}}\times\frac{h}{2}\times BC=\sqrt{3}$，当且仅当 $PM=\frac{\sqrt{3}}{2}BC$ 且 $PM\perp BC$ 时，等号成立.



11.【解】(1) 因为 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，

所以 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

(2) 因为 $AB=2$，$AC=5$，$\angle BAC=60°$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°=2\times5\times\frac{1}{2}=5$，

$|\overrightarrow{AM}|^2=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)=\frac{1}{4}(|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2)=\frac{1}{4}\times(2^2+2\times5+5^2)=\frac{39}{4}$，

$|\overrightarrow{BN}|^2=\left(-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)^2=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+$

$\frac{1}{4}\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}|\boldsymbol{b}|^2=2^2-5+\frac{1}{4}\times5^2=\frac{21}{4}$,

所以 $|\overrightarrow{AM}|=\frac{\sqrt{39}}{2}$, $|\overrightarrow{BN}|=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

又 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\left(-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}^2$

$=-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}|\boldsymbol{b}|^2$

$=-\frac{1}{2}\times2^2-\frac{1}{4}\times5+\frac{1}{4}\times5^2=3$,

所以 $\cos\angle MPN=\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN}\rangle=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}=\frac{4\sqrt{91}}{91}$.

12. ACD 【解析】由运算定义,

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$($\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角),$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\sin\theta$,所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$,故 A 正确;

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin\theta$($\theta$ 为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 的夹角),$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\sin\varphi+|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin\beta$($\varphi$ 为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$ 的夹角,β 为 $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 的夹角),所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 不一定相等,故 B 不一定正确;

若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=0$($\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角),则 $\theta=0$ 或 π,所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,故 C 正确;

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$($\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角),$(-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=|-\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\sin(\pi-\theta)=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$,故 D 正确.

1.5.2　数量积的坐标表示及其计算

1. D 【解析】因为 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,1)$,所以当 $\boldsymbol{c}=(4,4)$ 时,$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$,故选 D.

2. D 【解析】因为向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\boldsymbol{b}=(x-1,x)(x>1)$,且 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$,所以 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}=\sqrt{(x-1)^2+x^2}$,得 $x=-1$(舍)或 $x=2$,即 $\boldsymbol{b}=(1,2)$,所以 $m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2m-1,m-2)$,所以 $(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=4m-5=0$,解得 $m=\frac{5}{4}$. 故选 D.

3. A 【解析】$\because|\boldsymbol{a}|=4$,$\therefore$ 由题意可得 $4m=4$,解得 $m=1$,即 $\boldsymbol{b}=(1,1)$,

$\therefore \cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{4}{4\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because \cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$,

$\therefore \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{4}$. 故选 A.

4. $(2,1)$ 【解析】设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$,则 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=(x+1,y+2)$,$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=(x-1,y+1)$. 由$(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})/\!/\boldsymbol{b}$ 得,

$\begin{cases}x+1-(y+2)=0,\\2(x-1)=y+1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$

$\therefore \boldsymbol{c}=(2,1)$.

5. A 【解析】由已知得 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=(\sqrt{3}-\lambda,1-\sqrt{3}\lambda)$,

则$|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\sqrt{3}-\lambda)^2+(1-\sqrt{3}\lambda)^2}=2\sqrt{\left(\lambda-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}}\geqslant1$,当且仅当 $\lambda=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$时,等号成立. 故当 $\lambda=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$时,$|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|$有最小值 1. 故选 A.

6. C 【解析】因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是钝角,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$,且不共线,

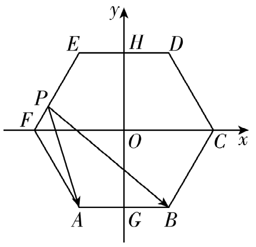
所以$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3x+10<0,\\5x+6\neq0,\end{cases}$

解得 $x>\dfrac{10}{3}$. 故选 C.

7. B 【解析】根据题意,若 $\overrightarrow{OP}=(2,2)$,则 $\overrightarrow{OP}=2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2=2(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$,$\overrightarrow{OP}^2=4(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)^2=4(\boldsymbol{e}_1^2+2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^2)=12$,则$|\overrightarrow{OP}|=2\sqrt{3}$. 故选 B.

8. B 【解析】以正六边形 $ABCDEF$ 中心 O 为原点建立平面直角坐标系,如图所示,设 AB,DE 交 y 轴于点 G,H,

则 $C(2,0)$,$F(-2,0)$,$A(-1,-\sqrt{3})$,$B(1,-\sqrt{3})$,$G(0,-\sqrt{3})$,$E(-1,\sqrt{3})$,$D(1,\sqrt{3})$,$H(0,\sqrt{3})$.



设 $P(x,y)(-2\leqslant x\leqslant2)$,则 $\overrightarrow{PA}=(-1-x,-\sqrt{3}-y)$,$\overrightarrow{PB}=(1-x,-\sqrt{3}-y)$,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2+y^2+2\sqrt{3}y+2$. 由正六边形对称

性，不妨只研究点 P 在 y 轴上及 y 轴左侧的情况.

(1) 当点 P 在线段 EH 上时，$x\in[-1,0]$，$y=\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2+11\leqslant 12$；

(2) 当点 P 在线段 AG 上时，$x\in[-1,0]$，$y=-\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2-1\leqslant 0$；

(3) 当点 P 在线段 EF 上时，x,y 满足 $y=\sqrt{3}(x+2)$，$x\in[-2,-1]$，则

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4x^2+18x+26=4\left(x+\dfrac{9}{4}\right)^2+\dfrac{23}{4}\leqslant 12$；

(4) 当点 P 在线段 AF 上时，x,y 满足 $y=-\sqrt{3}(x+2)$，$x\in[-2,-1]$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4x^2+6x+2=4\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{4}\leqslant 6$.

综上，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最大值为 12. 故选 B.

9. C 【解析】依题意设 $\boldsymbol{e}=(1,0)$，$\boldsymbol{a}=(x,y)$，

由 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=3$ 得 $x=3$，则 $\boldsymbol{a}=(3,y)$，

又 $\lambda\boldsymbol{e}-\boldsymbol{a}=(\lambda,0)-(3,y)=(\lambda-3,-y)$，

且 $|\lambda\boldsymbol{e}-\boldsymbol{a}|=1$，

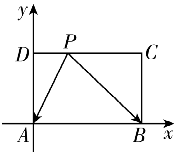
所以 $\sqrt{(\lambda-3)^2+(-y)^2}=1$，即 $y^2=1-(\lambda-3)^2$，所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+y^2}=\sqrt{9+1-(\lambda-3)^2}\leqslant\sqrt{10}$，当且仅当 $\lambda=3$ 时取等号，即 $|\boldsymbol{a}|$ 的最大值为 $\sqrt{10}$.

10. [8,10] 【解析】以 A 为坐标原点，AB，AD 所在直线分别为 x，y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(6,0)$，$C(6,4)$，$D(0,4)$，

设 $P(s,4)$，因为 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC}$，所以 $(s,0)=\lambda(6,0)$，即 $s=6\lambda$，故 $P(6\lambda,4)$，$\lambda\in\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$，

则 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=(-6\lambda,-4)+(6-6\lambda,-4)=(6-12\lambda,-8)$，

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{(6-12\lambda)^2+64}$，因为 $\lambda\in\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$，所以 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{(6-12\lambda)^2+64}\in[8,10]$.



11. ABC 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(-\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}=(t,\sqrt{3})$，由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $-\sqrt{3}t+1\times\sqrt{3}=0\Rightarrow t=1$，故 A 正确；

由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，得 $-\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1\times t=0\Rightarrow t=-3$，故 B 正确；

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$ 时，$\cos 60°=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-\sqrt{3}t+\sqrt{3}}{2\times\sqrt{t^2+3}}=\dfrac{1}{2}$，即 $t^2-3t=0$，

解得 $t=0$ 或 $t=3$.

代入验证 $t=3$ 不满足，则 $t=3$ 舍去，故 $t=0$，故 C 正确；

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角时，$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0,\\ \boldsymbol{b}\neq\lambda\boldsymbol{a},\end{cases}$

则 $\begin{cases}-\sqrt{3}t+\sqrt{3}>0,\\ -\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1\times t\neq 0,\end{cases}$ 解得 $t<1$ 且 $t\neq -3$，故 D 错误. 故选 ABC.

12. ACD 【解析】$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda-2$，由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 得 $-2\lambda=1$，解得 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$.

当 $\lambda>2$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\neq 1$，$\theta$ 为锐角，故 A 正确；

当 $\lambda<2$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，当 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ 时，θ 为平角，故 B 错误；

当 $\lambda=2$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\theta$ 为直角，故 C 正确；

因为当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，$\lambda=-\dfrac{1}{2}$，此时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为平角，故不存在 λ，使得 θ 为零角，故 D 正确. 故选 ACD.

1.6 解三角形

1.6.1 余弦定理

1. D 【解析】因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，所以 $\cos A=\dfrac{2}{3}$.

又因为 $b=2$，$c=3$，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=5$，

所以 $a=\sqrt{5}$. 故选 D.

2. D 【解析】因为 $b^2+c^2=a^2+\sqrt{3}bc$，所以由余弦定理的推论可得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\sqrt{3}bc}{2bc}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又因为 $0<A<\pi$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$，故选 D.

3. B 【解析】由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=13$，又因为 $bc=12$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $b^2+c^2=25$.

因为 $(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=49$，所以 $b+c=7$. 故选 B.

4. D 【解析】$AB=7$，$BC=5$，$CA=6$，

则由余弦定理的推论得 $\cos B=\dfrac{BC^2+AB^2-AC^2}{2BC\cdot AB}=\dfrac{25+49-36}{2\times5\times7}=\dfrac{19}{35}$，

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\pi-B)=7\times5\times\left(-\dfrac{19}{35}\right)=-19$. 故选 D.

5. C 【解析】设这个三角形为 $\triangle ABC$，面积为 S，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c.

依题意有 $S=\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}b\cdot\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{2}c\cdot\dfrac{1}{14}$，则 $a=12S$，$b=20S$，$c=28S$，

显然角 C 是最大角，

由余弦定理的推论得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{12^2S^2+20^2S^2-28^2S^2}{2\cdot12S\cdot20S}=-\dfrac{1}{2}<0$，

则 C 是钝角，所以该三角形一定是钝角三角形. 故选 C.

6. C 【解析】由 $c^2+2b^2=3a^2=3(b^2+c^2-2bc\cos A)$，整理得 $6\cos A=\dfrac{b}{c}+\dfrac{2c}{b}\geqslant2\sqrt{2}$，当且仅当 $b=\sqrt{2}c$ 时，等号成立.

则 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}\leqslant\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$，故选 C.

7. A 【解析】因为 $a:b=\ln 2:\ln 4=\ln 2:2\ln 2=1:2$，所以 $b=2a$，

所以 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 $a,2a,c$.

可得 $\begin{cases}a+2a>c,\\a+c>2a,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3a>c,\\c>a,\end{cases}$ 所以 $\dfrac{1}{3}<\dfrac{a}{c}<1$，所以 $\dfrac{a^2}{c^2}\in\left(\dfrac{1}{9},1\right)$.

因为 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=ba\cos C=$

$2a^2\cos C=kc^2$,

所以 $k=\dfrac{2a^2}{c^2}\cos C=\dfrac{2a^2}{c^2}\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2a^2}{c^2}\cdot\dfrac{a^2+4a^2-c^2}{2a\cdot 2a}=\dfrac{1}{c^2}\cdot\dfrac{5a^2-c^2}{2}=\dfrac{1}{2}\left(5\cdot\dfrac{a^2}{c^2}-1\right)\in\left(-\dfrac{2}{9},2\right)$.

故选 A.

8. 0 【解析】设 $BD=x$,则 $AD=3x$,$AC=2-3x$,$BC=2-x$.

在 $\triangle ADC$ 中,由余弦定理的推论得

$\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=\dfrac{6\sqrt{2}x-\sqrt{2}}{6x}$.

在 $\triangle BDC$ 中,由余弦定理的推论得

$\cos\angle BDC=\dfrac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}=\dfrac{2\sqrt{2}x-\sqrt{2}}{2x}$.

因为 $\angle BDC+\angle ADC=\pi$,

所以 $\cos\angle ADC=-\cos\angle BDC$,

即 $\dfrac{6\sqrt{2}x-\sqrt{2}}{6x}=-\dfrac{2\sqrt{2}x-\sqrt{2}}{2x}$,

解得 $x=\dfrac{1}{3}$.

所以 $AD=1$,$AC=1$.

在 $\triangle ADC$ 中,$AD^2+AC^2=CD^2$,所以 $AD\perp AC$,所以 $A=\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\cos A=0$.

9. $\sqrt{10}$ 【解析】记 $AB=c$. $\because a,b$ 是方程 $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ 的两个根,$\therefore$ 根据一元二次方程根与系数的关系有 $a+b=2\sqrt{3}$,$ab=2$. 又 $C=120°$,

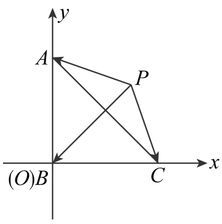
$\therefore$ 由余弦定理的推论得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{(a+b)^2-2ab-c^2}{2ab}=\dfrac{(2\sqrt{3})^2-2\times2-c^2}{2\times2}=-\dfrac{1}{2}$,

解得 $c=\sqrt{10}$. $\therefore AB=\sqrt{10}$.

10. -4 【解析】由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=6+12-12\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=6$,$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$,

$\therefore \angle ABC=90°$.

以 B 为坐标原点,建立如图所示的平面直角坐标系.



则 $A(0,\sqrt{6})$, $B(0,0)$, $C(\sqrt{6},0)$,

设 $P(x,y)$,

$\therefore \overrightarrow{PA}=(-x,\sqrt{6}-y)$, $\overrightarrow{PB}=(-x,-y)$,

$\overrightarrow{PC}=(\sqrt{6}-x,-y)$,

$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=x^2-y(\sqrt{6}-y)-x(\sqrt{6}-x)+y^2-x(\sqrt{6}-x)-y(\sqrt{6}-y)=3x^2-2\sqrt{6}x+3y^2-2\sqrt{6}y=(\sqrt{3}x-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}y-\sqrt{2})^2-4.$

$\because (\sqrt{3}x-\sqrt{2})^2\geqslant 0$, $(\sqrt{3}y-\sqrt{2})^2\geqslant 0$,

$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}\geqslant -4$,

当且仅当 $x=y=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 时，等号成立，

即 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$ 的最小值为 -4.

11. AD 【解析】由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $4=b^2+12-6b$，即 $b^2-6b+8=0$，即 $(b-2)(b-4)=0$，

由 $b<c$，得 $b=2$. 又 $a=2$, $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $B=A=30°$. 故选 AD.

1.6.2 正弦定理

1. D 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理可知 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，代入可得 $\dfrac{3}{\sin 60°}=\dfrac{b}{\sin 45°}$，解得 $b=\sqrt{6}$. 故选 D.

2. B 【解析】因为 $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$, $B=\dfrac{\pi}{6}$，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 可得 $\sin A=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. 因为 $a<b$，所以 $A<B$，故 $A\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$，故此三角形只有一个解. 故选 B.

3. 【解】(1) 在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得

$$\sin\angle ADB=\frac{AB\cdot\sin A}{BD}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{5}.$$

因为$\angle ADB<90°$，

所以 $\cos\angle ADB=\frac{\sqrt{23}}{5}$.

(2)在$\triangle BDC$中，由余弦定理 $BC^2=BD^2+DC^2-2BD\cdot DC\cos\angle BDC$，

得 $BC^2=BD^2+DC^2-2BD\cdot DC\cos(90°-\angle ADB)$，

即 $BC^2=BD^2+DC^2-2BD\cdot DC\sin\angle ADB=25+8-2\times5\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}=25$. 所以 $BC=5$.

4. A 【解析】对于 A，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0$，而 A 为三角形内角，故 A 为锐角，但此时不能得到$\triangle ABC$为锐角三角形，故 A 错误；对于 B，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}<0$，而 A 为三角形内角，故 A 为钝角，此时$\triangle ABC$为钝角三角形，故 B 正确；对于 C，若 $A>B$，则 $a>b$，故 $2R\sin A>2R\cdot\sin B$，即 $\sin A>\sin B$，故 C 正确；对于 D，$b\cos C+c\cos B=b\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=a$，故 D 正确. 故选 A.

5. C 【解析】在$\triangle ABC$中，$A>B$ 等价于 $a>b$，若$A\geqslant90°$，则 $A>B$，则 $a>b$，故 $a\leqslant b$ 时，此三角形不存在，故①说法正确；由 $A\geqslant90°$，知 B 为锐角，则此三角形最多有一解，故②说法正确；当 $A<90°$，$a<b$ 时，若$\frac{b\sin A}{a}>1$，则 $\sin B>1$，此三角形不存在，故③说法错误；若 $A<90°$，且 $a=b\sin A$，则 $\sin B=1$，即 $B=90°$，此三角形为直角三角形，故④说法正确；当 $A<90°$，且 $a=b$ 时，$A=B$，此三角形为等腰三角形，只有一解，故⑤说法错误. 故正确说法的个数为 3.

6. C 【解析】在$\triangle ABD$中，由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$，即$\frac{2}{\sin\angle ADB}=\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

解得 $\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $\cos\angle CDB=\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

在$\triangle BCD$中，由余弦定理的推论得

$\cos\angle CDB=\dfrac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}$,

即$\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{4^2+CD^2-(\sqrt{22})^2}{2\times4\times CD}$,

解得 $CD=3\sqrt{2}$或 $CD=-\sqrt{2}$(舍).

故选 C.

7. B 【解析】因为 $A=45°$, $b=2\sqrt{2}$,且△ABC 的面积是 1,所以 $\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}c\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$,得 $c=1$,由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=8+1-2\times2\sqrt{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5$,因为 $a>0$,所以 $a=\sqrt{5}$.

设△ABC 的外接圆半径为 r,则由正弦定理得 $2r=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{10}$,得 $r=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$,所以△ABC 的外接圆面积为 $\pi r^2=\pi\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=\dfrac{5\pi}{2}$,故选 B.

8. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 【解析】$\because$ $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$, $\therefore$ $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$,

$\therefore$ $\sin^2B-\sin^2C+(\sin A+\sin B)\cdot\sin A=0$,

$\therefore$ 由正弦定理得 $b^2-c^2+a^2+ab=0$,

$\therefore$ $a^2+b^2-c^2=-ab$,

$\therefore$ $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$,且 $C\in(0,\pi)$, $\therefore$ $C=\dfrac{2\pi}{3}$.

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab$,根据余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,

即 $3=a^2+b^2+ab$, $3-ab=a^2+b^2\geqslant2ab$,

$3ab\leqslant3$, $ab\leqslant1$,

当且仅当 $a=b$ 时,等号成立,

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{4}$,即△$ABC$ 面积的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

9. AC 【解析】因为 $a:b:c=2:3:4$,所以设 $a=2t$, $b=3t$, $c=4t$,且 $t>0$. 对于 A:由正弦定理,得 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=2:3:4$,故选项 A 正确;对于 B:因为 $a:b:c=2:3:4$,所以角 C 最大,则

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{4t^2+9t^2-16t^2}{2\times2t\times3t}=-\dfrac{1}{4}$，

则 C 为钝角，即△ABC 是钝角三角形，故选项 B 错误；对于 C：若 $c=8$，则 $a=4,b=6$，因为 $\cos C=-\dfrac{1}{4}$，所以 $\sin C=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times4\times6\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$，设△$ABC$ 的内切圆半径为 r，

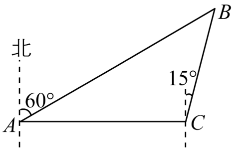
则由等面积法得 $\dfrac{1}{2}\times(4+6+8)r=3\sqrt{15}$，解得 $r=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$，故选项 C 正确；

对于 D：若 $c=8$，设△ABC 的外接圆半径为 R，由正弦定理，得 $2R=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{32\sqrt{15}}{15}$，即 $R=\dfrac{16\sqrt{15}}{15}$，故选项 D 错误. 故选 AC.

1.6.3　解三角形应用举例

1. B　【解析】作出示意图如图所示，

$AC=15\times4=60(\text{km})$，



$\angle BAC=90°-60°=30°$，$\angle ACB=90°+15°=105°$，

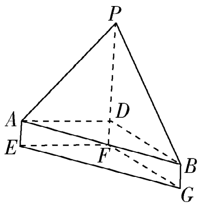
则 $\angle ABC=45°$.

由正弦定理，可得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$，

则 $BC=\dfrac{60\times\sin30°}{\sin45°}=30\sqrt{2}(\text{km})$，

所以这时船与灯塔的距离为 $30\sqrt{2}$ km.

2. $\dfrac{107\sqrt{7}}{7}+1$　【解析】如图，



由题知 $\angle PAD=45°$，$\angle PBD=30°$，$\angle ADB=150°$，$AE=DF=BG=1$.

在 Rt△PAD 中，$AD=PD$，

在 Rt△PBD 中，$BD=\sqrt{3}PD$，

在 $\triangle ADB$ 中,由余弦定理得 $AB^2=AD^2+BD^2-2\cdot AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB$,

即 $107^2=PD^2+3PD^2-2\cdot PD\cdot\sqrt{3}PD\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

即 $7PD^2=107^2$,$\therefore PD=\frac{107}{\sqrt{7}}=\frac{107\sqrt{7}}{7}$,

$\therefore$ 测量时气球离地的距离是 $\left(\frac{107\sqrt{7}}{7}+1\right)$ 米.

3.【解】(1)在 $Rt\triangle BCP$ 中,$\tan\angle PBC=\frac{PC}{BC}$,故 $BC=2$. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BCA=180°-15°-120°=45°$,由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AB}{\sin\angle BCA}$,解得 $AB=2(\sqrt{3}+1)$,从 A 到 B 共花 20 分钟,故巡逻船的航行速度为 $6(\sqrt{3}+1)$ km/h.

(2)在 $\triangle BCD$ 中,$BC=2$,$BD=\sqrt{3}+1$,$\angle DBC=60°$,由余弦定理可得 $CD=\sqrt{6}$,在 $\triangle BCD$ 中,由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin\angle DBC}=\frac{CB}{\sin\angle CDB}$,则 $\sin\angle CDB=\frac{\sqrt{2}}{2}$,而 $CD>CB$,则 $\angle CDB<\angle DBC$,故 $\angle CDB=45°$,所以此时山底 C 位于 D 处的南偏东 45°方向.

4.【解】(1)在 $\triangle BCD$ 中,由正弦定理知 $\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$,所以 $\frac{BD}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{\sin\frac{\pi}{4}}$,解得 $BD=6$.

若选条件①,因为 $\angle BCD=\frac{2\pi}{3}$,$\angle CBD=\frac{\pi}{4}$,

所以 $\angle BDC=\frac{\pi}{12}$,所以 $\angle BDE=\frac{\pi}{2}$.

在 $Rt\triangle BDE$ 中,$BE=\sqrt{BD^2+DE^2}=10$.

若选条件②,在 $\triangle BDE$ 中,由余弦定理的推论知 $\cos\angle DBE=\frac{BD^2+BE^2-DE^2}{2BD\cdot BE}$,

化简得 $5BE^2-36BE-140=0$,

解得 $BE=10$ 或 $BE=-\frac{14}{5}$(舍去).

故服务通道 BE 的长度为 10 km.

(2)在$\triangle ABE$ 中,由余弦定理知,$BE^2=BA^2+AE^2-2BA\cdot AE\cdot\cos\angle BAE$,

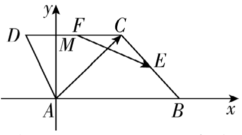
所以 $100=BA^2+AE^2+BA\cdot AE$,

所以 $(BA+AE)^2-BA\cdot AE=100$,即 $(BA+AE)^2-100=BA\cdot AE\leqslant\dfrac{(BA+AE)^2}{4}$,当且仅当 $BA=AE$ 时,等号成立,此时$\dfrac{3}{4}(BA+AE)^2=100$,即 $BA+AE$ 的最大值为$\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$km.

1.7　平面向量的应用举例

1. A　【解析】因为$|\boldsymbol{F}|=50$ 且 $\boldsymbol{F}$ 与小车的位移方向的夹角为 60°,又力 $\boldsymbol{F}$ 作用于小车 G,使小车 G 发生了 40 米的位移,所以力 $\boldsymbol{F}$ 做的功为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos 60°=50\times 40\times\dfrac{1}{2}=1\ 000$(J). 故选 A.

2. D　【解析】



以 A 为原点,AB 所在的直线为 x 轴,建立如图所示的平面直角坐标系,设 CD 与 y 轴交于点 M.

因为 $\angle BAD=120°$, $AB=4$, $AD=2$, $CD=3$,E,F 分别为 BC,CD 的中点,所以 $\angle DAM=30°$, $DM=1$, $AM=\sqrt{3}$, $MC=2$,

所以 $A(0,0)$,$C(2,\sqrt{3})$,$B(4,0)$,$D(-1,\sqrt{3})$,$E\left(3,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$F\left(\dfrac{1}{2},\sqrt{3}\right)$,

所以 $\overrightarrow{FE}=\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{AC}=(2,\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{2}\times 2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{7}{2}$. 故选 D.

3. B　【解析】设船的速度为 $\boldsymbol{a}$,水的速度为 $\boldsymbol{b}$,则船的实际航行速度为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=16+2\times4\times2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+4=12$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$,即船的实际航程为 $2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$(km). 故选 B.

4. B　【解析】由题意,不妨设当该学生两只胳膊的拉力最大时,他两只胳膊

的夹角为 $\theta,\theta\in(0,\pi)$，此时两只胳膊的拉力分别为$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$，则$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=\frac{\sqrt{3}}{3}mg$ N，则$|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|=mg$，即有$|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|^2=(mg)^2$，所以$\boldsymbol{F}_1^2+\boldsymbol{F}_2^2+2\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2=(mg)^2$，即$\frac{1}{3}(mg)^2+\frac{1}{3}(mg)^2+2\times\frac{1}{3}\times(mg)^2\times\cos\theta=(mg)^2$，得$\cos\theta=\frac{1}{2}$，故$\theta=\frac{\pi}{3}$，故选 B.

5. $\frac{1}{2}$　$\frac{6}{13}$　【解析】由$\frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cdot\cos\angle BCD=\frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|$，则

$\cos\angle BCD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

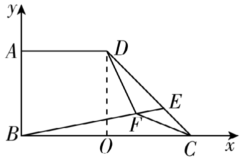
因为$\angle BCD\in(0,\pi)$，所以$\angle BCD=\frac{\pi}{4}$.

过点 D 作 BC 的垂线，垂足为 O.

因为 $AB=AD=1$，所以 $DO=OC=1$，$BC=2AD=2$，

由$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，得$\lambda=\frac{1}{2}$.

以 B 为坐标原点，建立平面直角坐标系，如图.



则 $D(1,1)$，$C(2,0)$，设 $E(m,n)$.

由$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EC}$，得$(m-1,n-1)=2(2-m,-n)$，

解得$m=\frac{5}{3},n=\frac{1}{3}$，即$E\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$.

设$F(x,y)$，$0\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}$，$0\leqslant y\leqslant\frac{1}{3}$，

则$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{BF}=(x,y)$.

因为 B,F,E 三点共线，

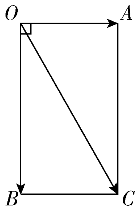
所以$\frac{5}{3}y=\frac{1}{3}x$，即$x=5y$.

$\overrightarrow{DF}=(x-1,y-1)$，$\overrightarrow{FC}=(2-x,-y)$，

所以$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{FC}=(x-1)(2-x)+y(1-y)=(5y-1)(2-5y)+y-y^2=-26y^2+16y-2=-26\left(y-\frac{4}{13}\right)^2+\frac{6}{13}$，

当 $y=\frac{4}{13}$时，$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{FC}$ 取得最大值$\frac{6}{13}$.

6.【解】如图，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{v}_0$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{v}_1$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{v}_2$，则由题意知 $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_1$，$|\overrightarrow{OA}|=1$，由向量加法的平行四边形法则得四边形 $OACB$ 为平行四边形.



(1)由此人朝正南方向游去得四边形 $OACB$ 为矩形，且$|\overrightarrow{OB}|=AC=\sqrt{3}$，如图所示.

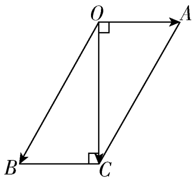
则在 Rt $\triangle OAC$ 中，$|\boldsymbol{v}_2|=OC=\sqrt{OA^2+AC^2}=2$，

$\tan\angle AOC=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$.

又 $\alpha=\angle AOC\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$. 所以此人实际前进方向与水流方向的夹角 α 为$\frac{\pi}{3}$，$\boldsymbol{v}_2$ 的大小为 2 m/s.

(2)由题意知 $\angle OCB=\frac{\pi}{2}$，且 $|\boldsymbol{v}_2|=|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3}$，$BC=1$，如图所示.



则在 Rt$\triangle OBC$ 中，

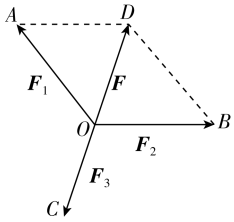
$|\boldsymbol{v}_1|=OB=\sqrt{OC^2+BC^2}=2$，

$\tan\angle BOC=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 又 $\angle BOC\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\angle BOC=\frac{\pi}{6}$，

则$\beta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$.

所以此人游泳的方向与水流方向的夹角 β 为$\frac{2\pi}{3}$，$\boldsymbol{v}_1$ 的大小为 2 m/s.

7. BC【解析】根据题意，画出图形，如图.



设 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 的合力为 $\boldsymbol{F}$,所以 $|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3^2+(2\sqrt{2})^2+2\times3\times2\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{5}$,所以 $|\boldsymbol{F}_3|=\sqrt{5}$ N.

因为 $\cos\angle AOD=\frac{3^2+(\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times3\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\cos\angle AOC=\cos(\pi-\angle AOD)=-\cos\angle AOD=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_3$ 夹角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 BC.